Министарство просвете Републике Србије
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА
07.03.2009.

III РАЗРЕД ОШ МРЧАЈЕВЦИ

1. а) У назначена поља $13\square + 62\square = 753$ упиши цифре тако да једнакост буде тачна. Два решења су $130+623=753$ и $133+620=753$. Нађи још два решења.

   б) У назначена поља $4\square 2 - 3\square 9 = 163$ упиши одговарајуће цифре тако да добијеш тачну једнакост. Нађи сва решења.

2. Између цифара (на левој страни)

   $$5 \quad 5 \quad 5 \quad 5 \quad = 100$$

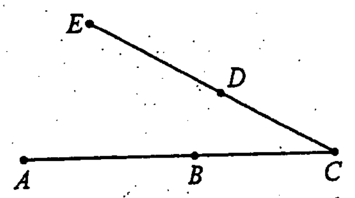
   упиши знаке рачунских операција и заграда тако да једнакост буде тачна. Нађи бар два решења.

3. Уместо слова A стави одговарајућу цифру

   $$\begin{array}{r} A \\ A\,A \\ +\,A\,A\,A \\ \hline 8\,6\,1 \end{array}$$

   тако да добијеш тачно сабирање.

4. Колико различитих
   а) правих, б) дужи
   одређују тачке A, B, C, D и E које имају положај као на слици?



5. Један часовник заостаје (касни) 6 секунди за 5 дана. Које време ће показивати 7. марта ове (2009.) године у подне ако је дотеран да показује тачно време првог јануара у подне?

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 120 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

РЕШЕЊА – III РАЗРЕД

1. а) 131+622 (**5 бодова**) и 132+621 (**5 бодова**).
   б) Како при одузимању цифре јединица једну десетицу преводимо у јединице, цифре десетица се заправо разликују за 7, па су сва могућа решења: 492 и 329, 482 и 319, 472 и 309. За једно тачно решење даје се **3 бода**; за два **6 бодова** и за сва три **10 бодова**.

2. Нека могућа решења су $5\cdot(5\cdot5-5)$, $(5\cdot5-5)\cdot5$ или $(5+5)\cdot(5+5)$.
   За одређено једно решење дати **10 бодова**, а за два **20 бодова**.

3. Збир три иста једноцифрена броја, означена са A, се завршава цифром 1. Како збир три једноцифрена броја може да буде најмање 3, а највише 27, то су могуће вредности овог збира 11 и 21. Како 11 не може да се подели са 3, то је тражени збир 21, а вредност слова A је 7 (**20 бодова**).

4. а) 6 правих: $p(A,B)$, $p(A,D)$, $p(A,E)$, $p(B,D)$, $p(B,E)$, $p(C,D)$. За две наведене праве дати **по 1 бод**, а за сваку следећу **по 2 бода**.
   б) 10 дужи: AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE, DE. За сваку написану дуж дати **по 1 бод**.

5. Од 1. јануара до 7. марта прође укупно 65 дана (**8 бодова**). Дакле, часовник ће каснити 65 : 5 = 13 пута по 6 секунди, што је укупно 78 секунди (**8 бодова**). Часовник ће у подне 7. марта показивати 11 часова 58 минута и 42 секунде (**4 бода**).

Министарство просвете Републике Србије
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА

07.03.2009.

IV РАЗРЕД

ОШ МРЧАЈЕВЦИ

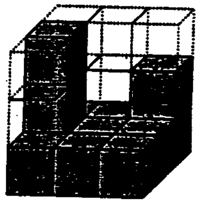
1. Израчунај:

$$209 \cdot 208 - 208 \cdot 207 - 2 \cdot 207.$$

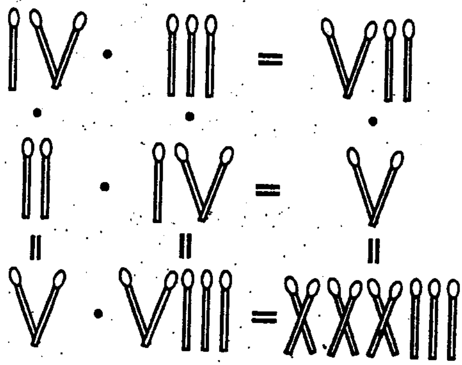
2. Од цифара 1, 2, 3 и 4 можеш да напишеш 24 четвороцифрена броја, а да се свака од тих цифара у сваком од бројева јавља тачно једанпут. Одреди два таква броја чији је збир 7733. Колико има решења?

3. Правоугаоник је са 3 праве подељен на 6 једнаких квадрата. Ако је обим правоугаоника 120cm, колики је обим једног од тих квадрата?

4. Велика коцка је састављена од 27 малих жутих коцки и обојена је споља зеленом бојом. Када се боја осушила Јеротије је раздвојио све мале коцке. Колико ће малих коцки имати
   а) 3 жуте и 3 зелене стране;
   б) 4 жуте и 2 зелене стране;
   в) 5 жутих и 1 зелену страну;
   г) све стране жуте боје?



5. У сваком хоризонталном реду (врсти) премести једно палидрвце тако да добијеш шест тачних једнакости:



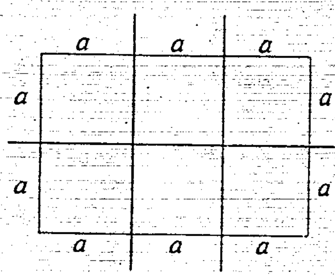
Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 120 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

РЕШЕЊА – IV РАЗРЕД

1. 2 (**20 бодова**).

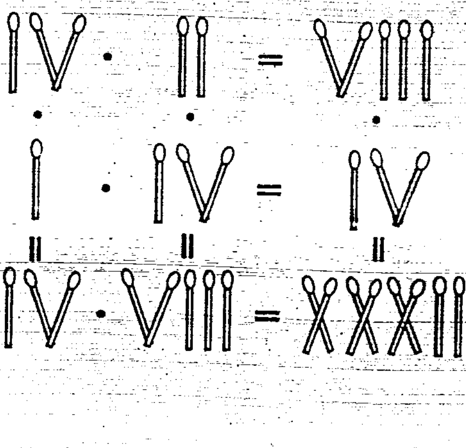
2. (**ML, XLI-4**) Како при било ком сабирању два броја од 1 до 4 нема прелаза преко десетице, то 3 можемо добити као 1 + 2, а 7 као 3 + 4. Одатле су могућа два решења: 4312 + 3421 (за једно решење **15 бодова**), 4321 + 3412 (још **5 бода** за друго решење).

3. Поделом са 3 праве на 6 квадрата добијамо фигуру као на слици (**5 бодова**). Одавде видимо да је обим правоугаоника једнак збиру 10 страница квадрата. Дакле, $10 \cdot a = 120$, тј.
   $a = 12\text{cm}$ (**10 бодова**).
   Обим квадрата је
   $4 \cdot a = 48\text{cm}$ (**5 бодова**).



4. (**ML, XLI-5**) а) 8 (**5 бодова**), б) 12 (**5 бодова**), в) 6 (**5 бодова**), г) 1 (**5 бодова**).

5. За сваку хоризонталну или вертикалну тачну једнакост **по 3 бода**. За комплетно урађен задатак **20 бодова**.



Министарство просвете Републике Србије
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА
07.03.2009.

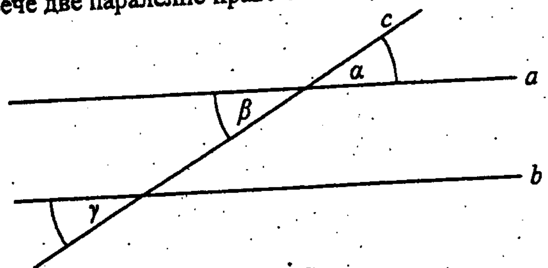
V РАЗРЕД ОШ ИЛИ МРЧАЈЕВЦИ

1. Колико има парова природних бројева n и $2n+1$ таквих да су оба броја (и n и $2n+1$) проста и мања од 100?

2. Пеца поједе целу пицу за 15 минута, а Пеца и Неца заједно поједу целу пицу за 6 минута. Колико је времена потребно Неци да сам поједе целу пицу?

3. Производ неколико простих бројева је 2009. Израчунај збир тих простих бројева.

4. Права c сече две паралелне праве a и b (види слику).



Ако је $\alpha+\beta+\gamma=2009'$, израчунај α.

5. Деда је 2 пута јачи од бабе, баба је 3 пута јача од унуке, унука је 4 пута јача од Жуће, Жућа је 5 пута јачи од мачке, мачка је 6 пута јача од миша. Деда, баба, унука, Жућа, мачка и миш могу заједно да ишчупају репу, а деда, баба, унука, Жућа и мачка (без миша) не могу. Колико мишева треба позвати да би они сами могли да ишчупају репу?

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 120 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

РЕШЕЊА – V РАЗРЕД

1. (ML, XLII-4) Највећи двоцифрени прост број облика $2n+1$ при чему је и n прост број је 83 (јер је $2\cdot 41+1=83$). Значи бројеви n могу бити: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41. Бројеви који се завршавају са 7 не испуњавају услов да је и $2n+1$ прост. Провером закључујемо да услове задатка испуњава 7 парова: 2 и 5, 3 и 7, 5 и 11, 11 и 23, 23 и 47, 29 и 59, 41 и 83 (сваки тачно одређен пар бодовати са **по 3 бода**, а све одређене парове са **20 бодова**).

2. (ML, XLI-4) Како Пеца целу пицу поједе за 15 минута, то значи да за 1 минут поједе $\frac{1}{15}$ пице (**4 бода**). Неца и Пеца заједно поједу пицу за 6 минута, то значи да за 1 минут поједу $\frac{1}{6}$ пице (**4 бода**). Неца за 1 минут поједе $\frac{1}{6}-\frac{1}{15}=\frac{1}{10}$ пице (**6 бода**). Дакле, Неца целу пицу поједе за 10 минута (**6 бодова**).

3. Како је $2009=7\cdot 7\cdot 41$ (**10 бодова**), то је збир тих простих бројева $7+7+41=55$ (**10 бодова**).

4. $\alpha=\beta$ – унакрсни углови (**3 бода**); $\beta=\gamma$ – углови са паралелним крацима (**3 бода**). Сада је $\alpha+\beta+\gamma=2009'$, $3\alpha=2009'$, одакле је
$$\alpha=669'\,40''=11^\circ\,9'\,40''$$ (**14 бодова**).

5. Означимо „снагу" миша са m. Тада мачка има „снагу" $6m$ (**3 бода**), Жућа $5\cdot 6m=30m$ (**3 бода**), унука $4\cdot 30m=120m$ (**3 бода**), баба $3\cdot 120m=360m$ (**3 бода**) и деда $2\cdot 360m=720m$ (**3 бода**). Дакле, њихова укупна „снага" је $1237m$, па треба позвати 1237 мишева (**5 бодова**).

Министарство просвете Републике Србије
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА

07.03.2009.

VI РАЗРЕД

ОШ МРЧАЈЕВЦИ

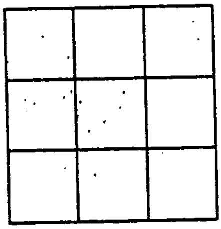
1. Одреди три рационална броја која су мања од $-\frac{5}{12}$ и већа од $-\frac{1}{2}$, а којима су именилац и бројилац узајамно прости бројеви.

2. У троуглу ABC ($AB>BC$) кроз тачке A и C конструисане су праве које су нормалне на симетралу угла ABC. Оне секу праве BC и AB, редом, у тачкама K и M. Израчунај дужину странице AB ако је $KC = 5\text{cm}$ и $MB = 8\text{cm}$.

3. Колико има природних бројева мањих од 2009 чији је производ цифара 42?

4. Дат је троугао чије су дужине страница цели бројеви (у центиметрима). Колики је најмањи, а колики највећи могући обим овог троугла ако је једна страница дужине 2009cm, а друга 2008cm?

5. Да ли се у квадрат 3×3 (види слику) могу уписати бројеви из скупа $\{-1, 0, 1\}$ тако да збирови бројева по колонама, врстама и дијагоналама буду различити (свака два)?

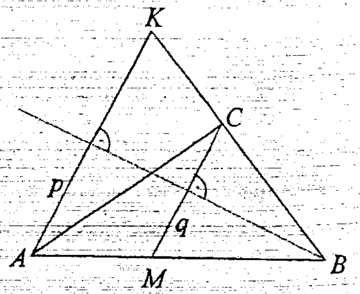


Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 120 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

РЕШЕЊА – VI РАЗРЕД

1. (ML, XLIII-4) Важи $-\frac{1}{2} < a < -\frac{5}{12}$. Проширимо разломке тако да имају једнаке имениоце. $-\frac{6}{12} < a < -\frac{5}{12}$ (*). Проширивањем разломака са 2 имамо $-\frac{12}{24} < a < -\frac{10}{24}$ па је $-\frac{11}{24}$ једно решење **(7 бодова)**. Проширивањем неједнакости (*) за 3 добијамо решење $-\frac{17}{36}$ **(7 бодова)**, а проширивањем са 4 и решење $-\frac{23}{48}$ **(6 бодова)**.

2. (ML, XLI-3) Нека права p садржи тачку A и нормална је на симетралу s угла ABC и нека права q садржи тачку C и нормална је на симетралу s. Како права p сече праву BC у тачки K, то је троугао ABK једнакокраки и $AB=BK$ **(6 бодова)**. Слично права q сече праву AB у тачки M, па је троугао BMC једнакокраки и $MB=BC$ **(6 бодова)**. Следи да је



$$AB = BK = BC + CK = MB + CK = 13\text{cm}$$ **(8 бодова)**.

3. Двоцифрени бројеви чији је производ цифара 42 пишу се цифрама 6 и 7 и има их 2: 67 и 76 **(2 бода)**. Троцифрени бројеви чији је производ цифара 42 пише се цифрама 1, 6, 7 или 2, 3, 7 и има их 12: 167, 176, 617, 671, 716, 761, 237, 273, 327, 372, 723, 732 **(9 бодова)**. Четвороцифрени бројеви чији је производ цифара 42 пише се цифрама 1, 1, 6, 7 или 1, 2, 3, 7 и има их 12: 1167, 1176, 1617, 1671, 1716, 1761, 1237, 1273, 1327, 1372, 1723, 1732 **(9 бодова)**. Дакле, укупно 26 бројева.

4. За трећу страницу троугла c важи $2009 - 2008 < c < 2009 + 2008$, односно $1 < c < 4017$ **(10 бода)**. Најмањи обим је O=4019cm за $c = 2$ cm **(5 бодова)**, а највећи обим је O=8033cm за $c = 4016$ cm **(5 бодова)**.

5. Могуће вредности збира три броја из скупа $\{-1, 0, 1\}$ иду од -3 до 3, тј. укупно 7 различитих вредности **(10 бодова)**. Како у табелу морамо да упишемо 8 различитих вредности, закључујемо да је бројеве немогуће уписати на тражени начин **(10 бодова)**.

Министарство просвете Републике Србије
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА

07.03.2009.

VII РАЗРЕД

ОШ МРЧАЈЕВЦИ

1. Докажи да вредност израза $\dfrac{\left(8^5\right)^{4n}}{\left(32^{3n}\right)^4}$ не зависи од n.

2. Упрости израз $\sqrt{(x+1)^2}-\sqrt{(x-1)^2}+2\sqrt{3}$ ако је $x=2-\sqrt{3}$.

3. У једнакостранични троугао странице 6cm, уписан је круг, а у круг је уписан квадрат. Израчунај површину тог квадрата. Који део површине троугла заузима површина квадрата?

4. За четвороугао $ABCD$ је познато да је $AB=4\text{cm}$, $BC=4\sqrt{2}$ cm, $CD=\sqrt{2}$ cm, $\sphericalangle ABC=45^0$ и $\sphericalangle BCD=90^0$. Израчунај обим и површину тог четвороугла.

5. На фудбалској утакмици у једном реду седишта на трибинама сео је известан број гледалаца. Затим је између свака два гледаоца сео још по један гледалац. Овакав начин заузимања места (седишта) поновио се укупно три пута (још 2 пута), па је после тога у том реду било 2009 гледалаца. Колико је гледалаца на почетку село у овај ред?

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 120 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

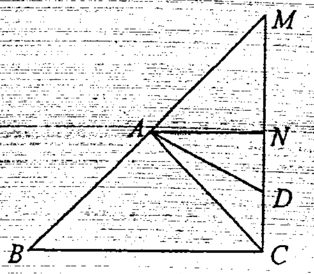
РЕШЕЊА – VII РАЗРЕД

1. $\dfrac{\left(8^5\right)^{4n}}{\left(32^{3n}\right)^4}=\dfrac{8^{20n}}{32^{12n}}$ (5 бодова) $=\dfrac{\left(2^3\right)^{20n}}{\left(2^5\right)^{12n}}=\dfrac{2^{60n}}{2^{60n}}=1$ (15 бодова).

2. (ML, XLIII-1) $\sqrt{(x+1)^2}-\sqrt{(x-1)^2}+2\sqrt{3}=|x+1|-|x-1|+2\sqrt{3}$ (5 бодова). Заменом вредности за x имамо

$$|x+1|-|x-1|+2\sqrt{3}=\left|2-\sqrt{3}+1\right|-\left|2-\sqrt{3}-1\right|+2\sqrt{3}$$
$$=\left|3-\sqrt{3}\right|-\left|1-\sqrt{3}\right|+2\sqrt{3}=3-\sqrt{3}-\left(\sqrt{3}-1\right)+2\sqrt{3}$$
$$=4$$ (15 бодова).

3. (ML, XLIII-2) Површина једнакостраничног троугла је $P_t=9\sqrt{3}$ cm^2 (3 бода). Полупречник уписаног круга у овај троугао је $r=\sqrt{3}$ cm (3 бода). Дијагонала квадрата једнака је пречнику круга, па је онда дијагонала $d=2\sqrt{3}$ cm (3 бода). Површина квадрата ће бити $P_k=6$cm^2 (5 бодова). Да би одредили који део површине заузима површина квадрата поделићемо површину троугла површином квадрата и добијамо $\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$ (6 бодова).



4. Означимо пресечну тачку правих AB и CD са M, а подножје нормале из A на CD са N. ΔBCM је једнакокрако правоугли па је $MC=4\sqrt{2}$ cm и $BM=8$cm (2 бода). Како је $AB=4$cm, тачка A је средиште хипотенузе и $AN=2\sqrt{2}$ cm (средња линија ΔBCM) (2 бода). Сада је N средиште дужи MC, и $NC=2\sqrt{2}$ cm. Из правоуглог троугла AND рачунамо да је $AD=\sqrt{10}$ cm (4 бода).

Сада је $O_{ABCD}=(4+5\sqrt{2}+\sqrt{10})$cm (4 бода). Површину рачунамо као

$$P_{ABCD}=P_{ABC}+P_{ACD}=8\text{cm}^2+2\text{cm}^2=10\text{cm}^2$$ (8 бодова).

5. Ако је на почетку у реду о коме је реч село n гледалаца, онда је првом „попуном“ у ред село још $n-1$ (4 бода), другом попуном још $2n-2$ (4 бода) и трећом „попуном“ још $4n-4$ гледалаца (4 бода), тако да је

$$n+(n-1)+(2n-2)+(4n-4)=2009,$$ одакле је $n=252$ (8 бода).

Министарство просвете Републике Србије
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА

07.03.2009.

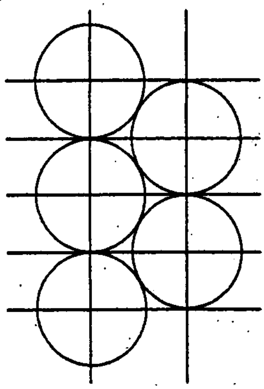
VIII РАЗРЕД

ОШ МРЧАЈЕВЦИ

1. Реши једначину
$$\left|x+\left|2x+\left|4x\right|\right|\right|=2009\,.$$

2. Три рационална броја a, b и c су таква да је један већи од нуле, један једнак нули и један мањи од нуле. Ако за те бројеве важи
$$\frac{a(c-b)}{b}>0,$$
који од тих бројева је већи, који мањи, а који једнак нули?

3. Колико је растојање (види слику) између суседних правих (водоравних односно усправних) ако су пречници свих кругова по 10cm?



4. Докажи да је број $6^{2n+2}-2^{n+3}\cdot 3^{n+2}+36$ дељив са 900 за сваки природан број n.

5. Основна ивица правилне шестостране призме повећана је за 200%, а висина је смањена за p%. Ако се запремина те призме повећала за p%, одреди да ли се површина омотача повећала или смањила и за колико процената.

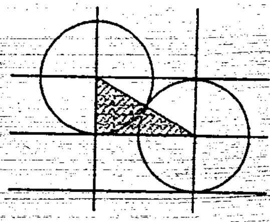
Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 120 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

РЕШЕЊА – VIII РАЗРЕД

1. За $x \geq 0$ имамо $\left|x+\left|2x+\left|4x\right|\right|\right| = |x+6x| = 7x = 2009$, одакле је $x = 287$ **(10 бодова)**. За $x < 0$ имамо $\left|x+\left|2x+\left|4x\right|\right|\right| = |x-2x| = -x = 2009$, одакле је $x = -2009$ **(10 бодова)**.

2. $b \neq 0$ јер је именилац разломка **(3 бода)** и $a \neq 0$ јер је производ различит од 0 **(3 бода)**. Дакле $c = 0$ **(4 бода)** и $\dfrac{a\cdot(-b)}{b} > 0$, одакле је $-a > 0$, тј. $a < 0$ **(8 бодова)**. Одавде је $b > 0$ **(2 бода)**.

3. Очигледно да је растојање између хоризонталних правих 10cm **(5 бодова)**. Растојање између вертикалних правих добијамо применом Питагорине теореме на шрафирани троугао са слике чија је хипотенуза 20cm и једна катета 10cm, па је тражено растојање $10\sqrt{3}$ cm **(15 бодова)**.



4. (ML XLI-6) Како је

$$6^{2n+2} - 2^{n+3}\cdot 3^{n+2} + 36 = 36\cdot\left(6^{2n} - 2^{n+1}\cdot 3^{n} + 1\right)$$

$$= 36\cdot\left(6^{2n} - 2\cdot 6^{n} + 1\right) = 36\cdot\left(6^{n}-1\right)^2 \quad \textbf{(10 бодова)}$$

и како је $6^n - 1$ дељиво са 5 **(5 бодова)**, следи да је дати број дељив са 36·25, односно са 900 **(5 бодова)**.

5. (ML XLI-4) Нека је a основица, а H висина призме. Тада је основна ивица нове призме $3a$, а висина $\left(1-\dfrac{p}{100}\right)H$ **(3 бода)**. Како је запремина нове призме већа за p% у односу на првобитну, добијамо да је

$$6\frac{(3a)^2\sqrt{3}}{4}\left(1-\frac{p}{100}\right)H = \left(1+\frac{p}{100}\right)6\frac{a^2\sqrt{3}}{4}H \quad \textbf{(5 бодова)}.$$

Следи да је $9\left(1-\dfrac{p}{100}\right) = 1+\dfrac{p}{100}$, па је p=80 **(5 бодова)**. Површина омотача нове призме је $0{,}6\cdot(6\cdot a\cdot H)$ **(4 бода)**, што значи да се површина омотача смањила за 40% **(3 бода)**.