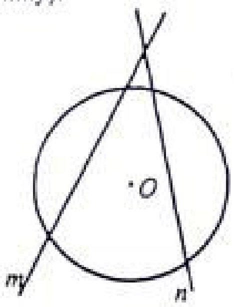
Друштво математичара Србије
ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА

10.03.2007.

3. РАЗРЕД

1. Израчунај:
   а) $438 + 163$ б) $908 - 159$
   в) $60 : 5 + 5 \cdot 3$ г) $85 + 15 : 5$

2. Нацртај на свом папиру круг са центром у тачки O и две праве m и n које се секу ван тог круга (види слику).



   а) Нацртај тачку B која је у нацртаном кругу и припада правој n.
   б) Нацртај праву s која сече праву n у тачки B и пролази кроз центар O круга.
   в) Нацртај тачке C и D у којима права s сече кружну линију (кружницу).
   г) Шта представља дуж OC за дати круг?

3. Симонида је рекла: "За три године ћу имати три пута мање година од моје мајке, која сада има 27 година." Колико година Симонида има сада?

4. Милан је поподне гледао пренос утакмице на ТВ-у од 14 часова и 30 минута до 16 часова и 15 минута, а увече емисију о рибама од 19 часова и 15 минута до 20 часова и 10 минута.
   а) Колико је трајао пренос утакмице?
   б) Да ли је дуже трајао пренос утакмице или емисија о рибама и за колико?

5. Број 509 има збир цифара 14 јер је $14 = 5 + 0 + 9$. Нађи највећи троцифрени број чији је збир цифара 12 и најмањи троцифрени број чији је збир цифара 21, а затим и разлику тако добијених бројева.

3. РАЗРЕД - РЕШЕЊА

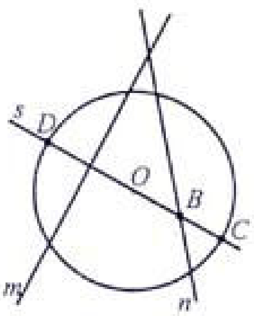
1. Израчунај:

   а) $438 + 163 = 601$ б) $908 - 159 = 749$

   в) $60 : 5 + 5 \cdot 3 = 27$ г) $85 + 15 : 5 = 88$

   Сваки део задатка носи по 5 бодова.

2.



   г) Дуж OC је полупречник круга.

   Сваки део задатка носи по 5 бодова.

3. Симонидина мајка ће за три године имати 30 година (5 бодова), а Симонида 10 (5 бодова). Симонида сада има $10 - 3 = 7$ година (10 бодова).

4. а) Пренос утакмице је трајао 1 час и 45 минута (8 бодова).

   б) Како је емисија о рибама трајала 55 минута (8 бодова), то је пренос трајао дуже 50 минута (4 бода)

5. Највећи троцифрени број чији је збир цифара 12 је 930 (8 бодова), а најмањи троцифрени број чији је збир цифара 21 је 399 (8 бодова). Разлика ових бројева је $930 - 399 = 531$ (4 бода).

4. РАЗРЕД

1. Између две цифре броја 664422 уписати цифру 3 тако да добијени седмоцифрени број буде:

   а) највећи могући,

   б) најмањи могући.

2. Годишњи комплет математичких листова састоји се од шест свешчица. Свешчице не морају имати исти број страница, али се зна да свака свешчица има 40 или 44 странице. Одредити може ли годишњи комплет математичких листова имати укупно 260 страница.

3. Правоугаоник је са две паралелне праве подељен на три једнака квадрата. Колико пута је обим тог правоугаоника већи од обима једног од квадрата?

4. Љиља и Биља заједно имају 228 динара, а Маша и Таша 166. Ако Љиља има 70 динара више од Маше, ко има више динара Биља или Таша и за колико?

5. Колико има троцифрених природних бројева чији је збир цифара једнак 4, а колико четвороцифрених природних бројева чији је производ цифара једнак 4?

Сваки задатак бодује се са по 20 бодова.
Израда задатака траје 120 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.
Забрањена је употреба калкулатора и мобилних телефона.

4. РАЗРЕД

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА:

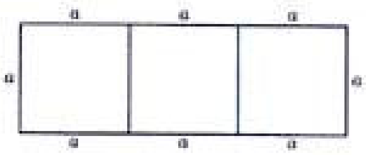
1. (МЛ 1, год. 2006/7, стр. 39, зад. 2024)

   а) Највећи могући такав број је 6644322. (10 бодова)

   б) Најмањи могући такав број је 6364422. (10 бодова)

2. Може. То се дешава када једна свешчица има 40 страница, а осталих пет свешчица по 44 странице. (20 бодова)

3. Ако дужину странице квадрата обележимо са a, онда је обим квадрата $4a$, а обим правоугаоника је $8a$. (15 бодова) Према томе, обим правоугаоника је два пута већи од обима једног од квадрата. (5 бодова)



4. Љиља и Биља заједно имају 62 динара више од Маше и Таше заједно. Како Љиља има 70 динара више од Маше, то Таша има 8 динара више од Биље. (20 бодова)

5. (МЛ 1, год. 2004/5, стр. 32, зад. 2365) Има их једнако, по десет. То су: 112, 121, 211, 220, 202, 130, 103, 310, 301 и 400, односно 1114, 1141, 1411, 4111, 1122, 1212, 1221, 2112, 2121 и 2211. (сваки наведени од ових бројева по 1 бод)

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА

10.03.2007.

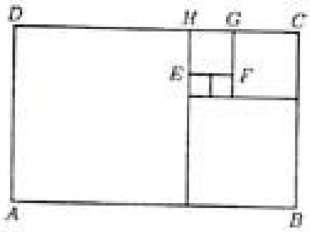
5. РАЗРЕД

1. Цифрама 1, 4, 5 и 7 написати све троцифрене бројеве чије су све цифре међусобно различите, а дељиви су са 3.

2. Израчунати мере углова на слици.

3. У једној школи сваки ученик учи бар један од два језика, енглески и француски. Енглески језик учи $\frac{4}{5}$ свих ученика, а француски $\frac{3}{4}$. Који део свих ученика учи оба језика?

4. Правоугаоник $ABCD$ подељен је на шест квадрата, као на слици.



Одредити површину правоугаоника $ABCD$ ако је обим квадрата $EFGH$ једнак $8\ cm$.

5. Поређати, од мањег ка већем, бројеве $\frac{2}{9}$, $\frac{25}{111}$ и $\frac{447}{2007}$.

5. РАЗРЕД

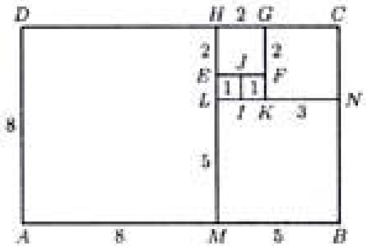
РЕШЕЊА ЗАДАТАКА:

1. (МЛ 2, год. 2005/6, стр. 10, зад. 6б) То су: 147, 174, 417, 471, 714 и 741. (За сваки број по 3 бода, плус 2 бода ако су наведени сви бројеви)

2. (МЛ 3, год. 2006/7, стр. 15, зад. 3) Како је $(3x^\circ + 1^\circ) + (x^\circ + 7^\circ) = 180^\circ$, то је $4x^\circ = 172^\circ$, односно $x = 43$. (10 бодова) Следи да су на слици углови од 130° (5 бодова) и 50° (5 бодова).

3. Како енглески језик учи $\frac{4}{5}$ свих ученика, то остатак, односно $\frac{1}{5}$ свих ученика учи само француски. (10 бодова) Број ученика који уче оба језика добијамо када од броја свих који уче француски одузмемо број оних који уче само тај језик. Како је $\frac{3}{4} - \frac{1}{5} = \frac{11}{20}$, следи да $\frac{11}{20}$ свих ученика учи оба језика. (10 бодова)

4. Обележимо сва темена свих квадрата, као на слици. Обим квадрата $EFGH$ је 8 cm, па је дужина његове странице 2 cm. (2 бода) Квадрати $LIJE$ и $IKFJ$ имају странице једнаке дужине, по 1 cm. (5 бодова) Даље, дужина странице квадрата $KNCG$ је 3 cm (3 бода), дужина странице квадрата $MBNL$ је 5 cm (3 бода), а дужина странице квадрата $AMHD$ је 8 cm (3 бода). Према томе, дужине страница правоугаоника $ABCD$ су 13 cm и 8 cm, па је његова површина 104 cm^2. (4 бода)



5. Из једнакости $\frac{2}{9} = \frac{2\cdot223}{9\cdot223} = \frac{446}{2007}$ следи да је $\frac{2}{9} < \frac{447}{2007}$. (8 бодова) Како је $\frac{447}{2007} = \frac{149}{669}$ и $\frac{149}{669} < \frac{150}{669} < \frac{150}{666}$ и $\frac{150}{666} = \frac{25}{111}$, то је $\frac{447}{2007} < \frac{25}{111}$. (12 бодова) Решење је: $\frac{2}{9}, \frac{447}{2007}, \frac{25}{111}$.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА

10.03.2007.

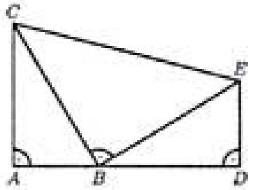
6. РАЗРЕД

1. Одредити збир целобројних решења неједначине $|x-1|<6$.

2. Симетрале углова BAC и ABC троугла ABC секу се под углом од $124°$. Одредити меру угла ACB.

3. Аца, Бора и Веса су имали неколико кликера у кеси. Аца је пришао и додао онолико кликера колико је било у кеси и још 1 кликер. Затим је Бора пришао и додао два пута онолико кликера колико је у том тренутку било у кеси и још 3 кликера. Последњи је пришао Веса и додао три пута онолико кликера колико је у том тренутку било у кеси и још 5 кликера. Ако је на крају у кеси било 149 кликера, колико кликера је било у кеси на почетку?

4. На дужи AD дата је тачка B, таква да су троуглови ABC и DEB правоугли, а троугао CBE једнакокрако правоугли, као на слици. Доказати да су троуглови ABC и DEB подударни.



5. У једној школи има 800 ученика. Доказати да бар три ученика имају рођендан истог датума.

6. РАЗРЕД

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА:

1. Дата неједначина је еквивалентна са $-6 < x - 1 < 6$ (8 бодова), односно са $-5 < x < 7$ (4 бода). Према томе, целобројна решења неједначине су $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$ и 6 (4 бода), а њихов збир је 11 (4 бода).

2. (МЛ 2, год. 2006/7, стр. 32, зад. 2480) Из чињенице да се симетрале углова BAC и ABC секу под углом од $124°$ следи да је $\frac{1}{2} \cdot \measuredangle BAC + \frac{1}{2} \cdot \measuredangle ABC + 124° = 180°$. (10 бодова) Одатле добијамо да је $\measuredangle BAC + \measuredangle ABC = 112°$ (5 бодова), па је $\measuredangle ACB = 68°$ (5 бодова).

3. Нека је на почетку у кеси било x кликера. Аца је додао $x + 1$ кликер, што значи да је након тога у кеси било $2x + 1$ кликера. (5 бодова) Затим је Веса додао $2(2x + 1) + 3$ кликера, тј. $4x + 5$ кликера, што значи да је након тога у кеси било $6x + 6$ кликера. (5 бодова) Последњи је пришао Веса и додао $3(6x + 6) + 5$ кликера, односно $18x + 23$ кликера. Према томе, на крају је у кеси било $24x + 29$ кликера. (5 бодова) Како је $24x + 29 = 149$, то је $x = 5$. (5 бодова)

4. Троугао CBE је једнакокрако правоугли, па је $BC = EB$. (5 бодова) Нека је $\measuredangle ABC = \alpha$. Тада је $\measuredangle BCA = 90° - \alpha$. Како је $\measuredangle ABC + 90° + \measuredangle EBD = 180°$, то је $\measuredangle EBD = 90° - \measuredangle ABC$, тј. $\measuredangle EBD = 90° - \alpha$. Одатле добијамо да је $\measuredangle DEB = \alpha$. На основу свега овога следи да је $\measuredangle ABC = \measuredangle DEB$ (5 бодова) и $\measuredangle BCA = \measuredangle EBD$ (5 бодова). На основу другог става подударности (УСУ) следи да је $\triangle ABC \cong \triangle DEB$. (5 бодова)

5. (МЛ 1, год. 2004/5, стр. 37, зад. 1927) Распоредимо ученике у 366 група, при чему истој групи припадају они ученици који славе рођендан истог датума. Како је $800 = 366 \cdot 2 + 68$, бар једна група садржи бар 3 ученика. Они имају рођендан истог датума. (20 бодова)

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА

10.03.2007.

7. РАЗРЕД

1. Израчунати вредност израза $\sqrt{(\sqrt{5}-5)^2}-(\sqrt{5}-5)$.

2. У правоуглом троуглу ABC дужине катета AC и BC су редом 30 cm и 40 cm. Ако је C_1 средиште хипотенузе, а C_2 подножје хипотенузине висине, израчунати дужину дужи C_1C_2.

3. Дужине страница AB и BC правоугаоника $ABCD$ су редом 5 cm и 3 cm. Пресек праве која садржи тачке B и C и симетрале угла BAD је тачка M, а пресек праве која садржи тачке A и D и симетрале угла BCD је тачка N. Израчунати површину четвороугла $ANCM$.

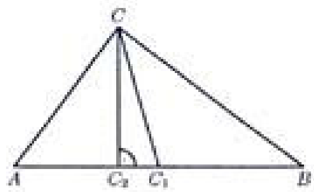
4. Одредити најмањи природан број који је дељив са 15, а свака цифра му је 0 или 4.

5. Одредити најмањи природан број који се може добити кад се у изразу $1*2*3*\cdots*2005*2006$ свака звездица замени са $+$ или $-$.

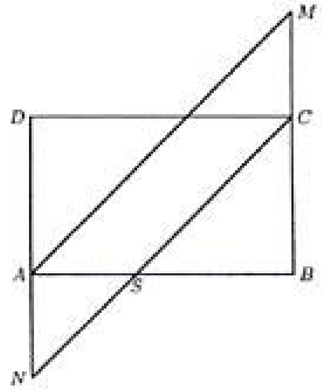
РЕШЕЊА ЗАДАТАКА:

1. (МЛ 1, год. 2005/6, стр. 21, зад. 10) $\sqrt{(\sqrt{5}-5)^2}-(\sqrt{5}-5)=|\sqrt{5}-5|-(\sqrt{5}-5)=5-\sqrt{5}-\sqrt{5}+5=10-2\sqrt{5}$. (20 бодова)

2. Примењујући Питагорину теорему на правоугли троугао ABC добијамо да је $AB^2=AC^2+BC^2$, па је дужина хипотенузе AB једнака 50 cm. (2 бода) Дужина тежишне дужи која одговара хипотенузи једнака је половини дужине хипотенузе, па је дужина дужи CC_1 једнака 25 cm. (6 бодова) Површина правоуглог троугла једнака је половини производа дужина катета, односно половини производа дужина хипотенузе и одговарајуће висине. Одавде добијамо да је дужина дужи CC_2 једнака $\frac{30 \cdot 40}{50}$ cm, тј. 24 cm. (6 бодова) Коначно, примењујући Питагорину теорему на правоугли троугао C_1CC_2 добијамо да је $C_1C_2^2=C_1C^2-CC_2^2$, па је дужина дужи C_1C_2 једнака 7 cm. (6 бодова)



3. Нека је тачка S пресек дужи AB и CN. Како је $\measuredangle BCS=45^\circ$, а троуглови BCS и ANS су правоугли, то је $\measuredangle CSB=45^\circ$ и $\measuredangle ASN=\measuredangle ANS=45^\circ$. Следи да су троуглови BCS и ANS и једнакокраки, па је $BS=BC=3$ cm, а $AN=AS=2$ cm. (6 бодова) Како је и $\measuredangle BAM=45^\circ$, он је једнак са $\measuredangle BSC$, па је $NC \parallel AM$. Такође је $NA \parallel CM$, па је четвороугао $ANCM$ паралелограм. (8 бодова) Његова површина је производ дужина странице AN и одговарајуће висине AB, те је према томе једнака 10 cm^2. (6 бодова)



4. Број је дељив са 15 ако је дељив и са 5 и са 3. Да би био дељив са 5, тражени број се мора завршавати нулом, (5 бодова) а да би био дељив са 3, збир цифара му мора бити дељив са 3. Због тога се у декадном запису тог броја мора појавити тачно k четворки, где је k број дељив са 3. Како тражимо најмањи природан број са задатом особином, то је $k=3$. (10 бодова) Тражени број је 4440. (5 бодова)

5. (МЛ 1, год. 2006/7, стр. 40, зад. 235) Најмањи природан број који се може добити је 1, на пример на следећи начин: $(1-2-3+4)+(5-6-7+8)+\cdots+(2001-2002-2003+2004)-2005+2006$. (20 бодова)

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА

10.03.2007.

8. РАЗРЕД

1. У једначини $3 \cdot (x - 4k) - 2k = 3 \cdot (2x - 3) + 1$ број k је реалан параметар. Одредити све вредности тог параметра за које је решење једначине веће од -2.

2. У једнакостраничан троугао ABC уписана су три круга, тако да сваки од њих додирује по две странице и уписани круг k тог троугла. Одредити однос површине круга k и збира површина та три уписана круга.

3. Одредити скуп свих вредности позитивног реалног броја a за које неједначина $|x - 2| < a$ има тачно четири решења у скупу целих бројева.

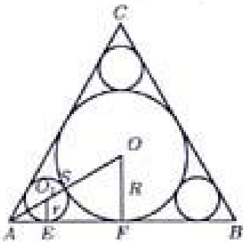
4. Коцка чија ивица је дужине 10 cm пресечена је једном равни на два квадра. Одредити однос запремина тих квадара ако је однос њихових површина $2 : 3$.

5. На свакој страници квадрата дате су по 3 тачке тако да ниједна од њих није теме квадрата. Колико је троуглова одређено овим тачкама?

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА:

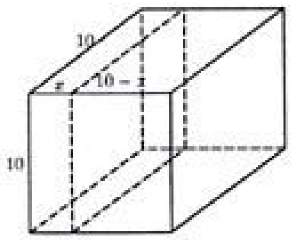
1. (МЛ 2, год. 2005/6, стр. 17, зад. 9) Решење дате једначине је $x = \frac{8-14k}{3}$. (8 бодова) То решење је веће од -2 ако је $\frac{8-14k}{3} > -2$, тј. ако је $k < 1$. Према томе, $k \in (-\infty, 1)$. (12 бодова)

2. Нека су тачка O и R центар и дужина полупречника круга k, а тачка O_1 и r центар и дужина полупречника једног од три подударна уписана круга. Нека је, даље, S додирна тачка та два круга, а F и E тачке у којима их страница AB додирује. Како су троуглови AFO и AEO_1 правоугли, а $\measuredangle FAO = 30°$, то је $AO = 2R$ и $AO_1 = 2r$. Следи да је $AS = AO - OS = R$, а такође и $AS = AO_1 + O_1S = 3r$. Према томе, $R = 3r$. (15 бодова) Површина круга k је $R^2\pi$, односно $9r^2\pi$, а збир површина три уписана круга је $3r^2\pi$. Тражени однос је $3:1$. (5 бодова)



3. (МЛ 3, год. 2006/7, стр. 31, зад. 2493) Дата неједначина еквивалентна је са $2-a < x < 2+a$. (5 бодова) Ако је $a \leq 1$, број 2 је једино решење неједначине. Ако је $1 < a \leq 2$, решења неједначине су 1, 2 и 3. Ако је $a > 2$, неједначина има пет или више решења. Следи да не постоји позитиван реалан број a за који дата неједначина има тачно 4 решења у скупу целих бројева. Према томе, тражени скуп вредности је празан. (15 бодова)

4. Нека дата раван дели ивице коцке које сече на делове дужине x и $10-x$ (у cm). Тада су површине квадара (у cm^2) на које је подељена коцка $2\cdot 100 + 4\cdot 10x$ и $2\cdot 100 + 4\cdot 10\cdot(10-x)$, односно $200+40x$ и $600-40x$. (6 бодова) Однос тих површина је $2:3$, па из једначине $3\cdot(200+40x) = 2\cdot(600-40x)$ добијамо да је $x = 3$. (8 бодова) Запремине датих квадара су $3\cdot 10\cdot 10\ cm^3$ и $7\cdot 10\cdot 10\ cm^3$. Следи да је однос тих запремина $3:7$. (6 бодова)



5. Могуће је да два темена троугла припадају истој страници квадрата или да свако теме троугла припада различитој страници квадрата. У првом случају, на 4 начина бирамо страницу квадрата којој припадају два темена троугла, на 3 начина бирамо две од три тачке са изабране странице и на 9 начина бирамо треће теме троугла од тачака које припадају осталим страницама квадрата. Следи да је, у овом случају, датим тачкама одређено $4\cdot 3\cdot 9$ троуглова, тј. 108 троуглова. (10 бодова) У другом случају, на 4 начина бирамо три од четири странице квадрата којима припада по једно теме троугла, а на $3\cdot 3\cdot 3$ начина са сваке од изабраних страница квадрата по једну од три дате тачке. Следи да је, у овом случају, датим тачкама одређено $4\cdot 3\cdot 3\cdot 3$ троуглова, тј. 108 троуглова. (10 бодова) Према томе, укупно је датим тачкама одређено 216 троуглова.